Prácticas de laboratorio (Física I y Física II)

Antonio González Fernández
Departamento de Física Aplicada III
Universidad de Sevilla

4. Incertidumbre de una función de una o varias variables

La incertidumbre se propaga en los cálculos

$$T = \frac{\langle t \rangle}{6}$$

$¿E_T?$

Si dividimos la magnitud, dividimos la incertidumbre

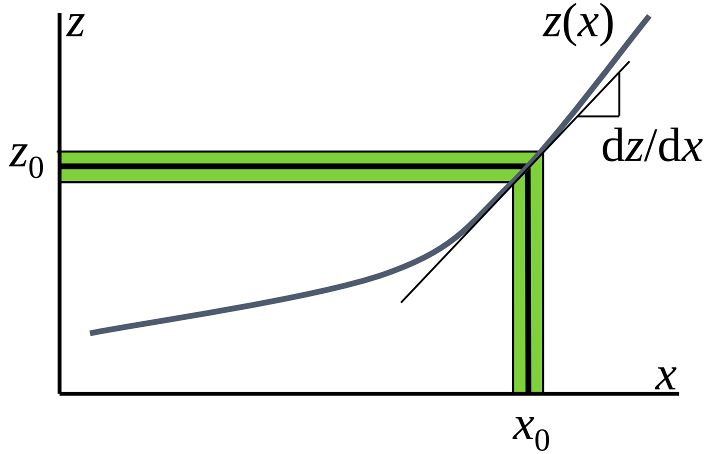
$$E_T = \frac{E_{\langle t \rangle}}{6}$$

$$t = 5.746 \pm 0.05748\mathrm{s}$$

$$T = 0.957667 \pm 0.00958\mathrm{s}$$

(completo en el borrador)

$$T = 0.958(10)\mathrm{s}$$



$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$¿E_\omega?$

$$E_\omega = \left|\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}T}\right| E_T$$

$$E_\omega = \frac{2\pi}{T^2} E_T$$

$$\omega = 6.56093 \pm 0.065632\mathrm{s}^{-1}$$

$$\omega = 6.56(7)\mathrm{s}^{-1}$$

Incertidumbre de una función de varias variables inciertas

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2}$$

$$T = 0.957667 \pm 0.00958\mathrm{s}$$

$$m = 0.500 \pm 0.005\mathrm{kg}$$

$$k = 21.5229\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Si m y T son inciertas, ¿cuánto vale E_k?

$$E_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m}\right)^2 E_m^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T}\right)^2 E_T^2 + \cdots}$$

Derivadas parciales

$$\frac{\partial k}{\partial m} = \frac{4\pi^2}{T^2} = 43.0458\mathrm{s}^{-2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial T} = -\frac{8\pi^2 m}{T^3} = -44.9486\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^3}$$

$$E_k = 0.48140\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

Una vez que se tienen k y E_k

$$k = 21.5(5)\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$$

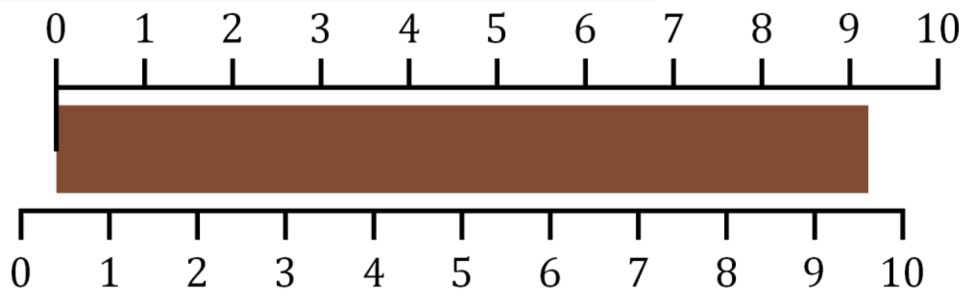
El caso del error en la medida de una longitud

Si medimos la longitud de una pieza con una regla graduada en mm, ¿cuál es su incertidumbre?

Depende

Si fijamos un extremo, solo tenemos incertidumbre en el otro

$$E_x = 1\,\mathrm{mm}$$



Si los dos extremos son inciertos, la medida tiene una mayor incertidumbre

$$x = x_2 - x_1$$

$$E_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\right)^2 E_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\right)^2 E_{x_2}^2} = \sqrt{E_{x_1}^2 + E_{x_1}^2}$$

$$E_x = 1.4\,\mathrm{mm}$$

Algunos casos concretos de funciones

Si un ángulo mide $\theta = 30.0 \pm 0.1°$, ¿cuánto es $y = \mathrm{sen}(\theta)$?

$$y = \mathrm{sen}(30.0°) = 0.50000\ldots$$

$$E_y = 0.1° \times \frac{\pi}{180°} \times \cos(30.0) = 0.0015115$$

$$y = 0.5000 \pm 0.0015 = 0.5000(15)$$

¡Hay que pasar la incertidumbre a radianes!

Logaritmo	$y = \ln(x)$	$E_y = \dfrac{E_x}{x} = \epsilon_x$
Suma	$z = x + y$	$E_z = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$
Producto	$z = xy$	$E_z = \sqrt{y^2 E_x^2 + x^2 E_y^2}$ ⇒ $\epsilon_z = \dfrac{E_z}{z} = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}$